



TITLE:

# 特異摂動系におけるアヒル解の数値計算について

AUTHOR(S):

児玉, 貴大; 土居, 伸二

---

CITATION:

児玉, 貴大 ...[et al]. 特異摂動系におけるアヒル解の数値計算について. 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題 2012, 112(363): 45-50

ISSUE DATE:

2012-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/193922>

RIGHT:

copyright ©2012 by IEICE

一般社団法人 電子情報通信学会  
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,  
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報  
IEICE Technical Report  
NLP2012-96(2012-12)

## 特異摂動系におけるアヒル解の数値計算について

児玉 貴大<sup>†</sup> 土居 伸二<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

E-mail: {kodama@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

**あらまし** Bonhoeffer-van der Pol(BVP) 神経モデルなどの特異摂動系にはアヒル解と呼ばれる非線形振動が現れる。2次元 BVP 方程式のアヒル解の数値計算により、理論的にあり得ない不可解な(カオス的)解軌道が発生する。これまでに、高精度計算ライブラリを用いてアヒル解を計算すると不可解な解軌道は発生しないことを確認し、そのようなカオス的な解軌道の発生は数値計算における丸め誤差が主な原因であることを示した。本研究では、さらに詳細な解析を行い、数値解法の精度などがアヒル解に及ぼす影響を定量的に調べる。さらに3次元の特異摂動系である拡張 BVP 方程式においても高精度計算ライブラリを用いた計算を行い、3次元システムにおけるアヒル解についても解析を行う。

**キーワード** 特異摂動系, アヒル解, 漸近解析, 高精度数値計算ライブラリ

## On numerical computation of canard solution in a singularly perturbed system

Takahiro KODAMA<sup>†</sup> and Shinji DOI<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Kyotodaigaku-katsura Nishikyo-ku, Kyoto, 615-8510 Japan

E-mail: {kodama@rotary., doi@}kuee.kyoto-u.ac.jp

**Abstract** In singularly perturbed systems such as the Bonhoeffer-van der Pol (BVP) neuronal model, there are characteristic phenomena such as canards. In the two-dimensional BVP equations, theoretically impossible (chaotic) types of canards have been found by numerical computations. It has been shown that the lack of precision in numerical computations generates such theoretically impossible orbits, since such orbits are not generated in high precision computation. In this study, we analyze relationship between accuracy of the numerical method and the canards in detail. Furthermore, we analyze canards in the three-dimensional system using the high precision computation library.

**Key words** Singularly Perturbed System, Canard Solution, Asymptotic Analysis, High Precision Computation Library

### 1. ま え が き

時定数の異なる複数の時間スケールを持つシステムは特異摂動系と呼ばれ、アヒル解や長周期振動など固有の非線形現象が現れる。アヒル解とは、nullcline の安定な枝と不安定な枝の両方に沿う周期解であり、Hopf 分岐近傍で観測される。またアヒル解が発生するパラメタ値の範囲は非常に狭く、そのパラメタ値は漸近解析によって求めることができる [1]。2次元の Bonhoeffer-van der Pol 方程式 (以下 BVP 方程式と省略する。FitzHugh-Nagumo (FHN) 方程式とも呼ばれる) [2] において、

漸近解析によりアヒル解の発生するパラメタの近似値が得られている。しかし、そのアヒル解を数値計算するとき、カオス的な解軌道が発生することがある [3]。2次元のシステムではカオス的な解軌道は理論的にあり得ないもので、不可解な解軌道であると言える。前回の報告では、高精度計算ライブラリを用いたアヒル解の計算では不可解な解軌道は発生しないことを示し、そのようなカオス的な解軌道の発生は数値計算における丸め誤差が主要な原因であると結論づけた [4]。

しかし、微分方程式の解の数値計算の精度には、数値解法自体の精度も大きく関係している。そこで本研究では、さらに詳

細な数値計算を行い、数値解法の精度がアヒル解にどのような影響を及ぼすかを高精度計算ライブラリを用いて解析する。さらに、3次元の特異摂動系である拡張 BVP 方程式においても高精度計算ライブラリを用いてアヒル解の解析を行う。

## 2. 2次元システムにおけるアヒル解

### 2.1 Bonhoeffer-van der Pol 方程式

2次元の特異摂動系の代表例として BVP 方程式を考える：

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y =: f(x, y) \tag{1a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(x - b) =: g(x, y) \tag{1b}$$

ここで、 $0 < \varepsilon \ll 1$  である。このとき、 $y$  に比べて  $x$  が速く変化するため、 $x$  を速い変数、システム (1a) を速いサブシステムと呼ぶ。一方、 $y$  を遅い変数、システム (1b) を遅いサブシステムと呼ぶ。

アヒル解が発生するパラメタ  $b$  の値は漸近解析によって求められる [1], [3]。そのパラメタの近似値は漸近展開の形で得られ、本研究では  $\varepsilon^n$  の項まで展開して得られたパラメタ  $b$  の近似値を

$$B_{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^n b_k \varepsilon^k \tag{2}$$

と表す。表 1 に漸近解析により求められた式 (2) 中の係数  $b_k$  の値を示す (漸近解析の詳細は省略)。この値を用いて、式 (2) からアヒル解が発生するパラメタの近似値を得る。

表 2 に  $\varepsilon = 0.1$  のときのアヒル解の発生するパラメタの近似値を示す。また、そのパラメタ値を用いてアヒル解を計算した結果を図 1 に示す。解軌道の計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用い刻み幅は  $h = 10^{-2}$  とし、計算には double 型変数 (倍精度) を用いた。 $\partial f / \partial x = 1 - x^2$  より、速いサブシステムの平衡点 ( $x$ -nullcline:  $dx/dt = 0$  なる曲線) の (速いサブシステムとしての) 安定性は、 $|x| < 1$  の場合は不安定、 $|x| > 1$  ならば安定である。このことから、図 1 において、 $|x| > 1$  での  $x$ -nullcline を安定な枝と呼び、解軌道はこの安定な枝に近づくように動く。一方、 $|x| < 1$  での  $x$ -nullcline を不安定な枝と呼び、解軌道はこの不安定な枝から遠ざかるように動く。図 1 に示したように、

表 1 アヒル解が発生するパラメタ値の漸近解析結果  $b_k$ 。

$k$	$b_k$
1	1/8
2	3/32
3	173/1024
4	7593/16384
5	436777/262144
6	15340159/2097152
7	632102203/16777216
8	238354961943/1073741824
9	25259485392653/17179869184
10	1485473230701825/137438953472
⋮	⋮

表 2 BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメタの近似値 ( $\varepsilon = 0.1$ )。

$n$	$B_{n,0.1}$
1	-0.9875
4	-0.986347210693359
9	-0.986315776443403
20	-0.986301374830635
27	-0.985939041390151

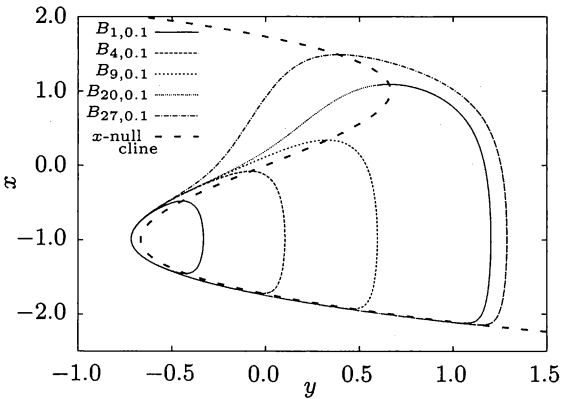


図 1 BVP 方程式において表 2 に示したパラメタ値  $b = B_{n,0.1}$  を用いて計算したアヒル解 ( $\varepsilon = 0.1$ )。

アヒル解は不安定な枝に沿う部分を持つ解軌道である。

BVP 方程式において  $\varepsilon = 0.01$ 、パラメタを  $b = B_{9,0.01}$  とした場合のアヒル解を図 2 に示す。不安定な枝において上方向と下方向に向かう解が見られ、カオス的な振る舞いをしていることがわかる。しかし、2次元のシステムでは、このようなカオス的な解軌道は理論的にあり得ない不可解な解軌道であると言える。本研究では、この不可解な解軌道について、数値計算における誤差に注目して解析を行う。

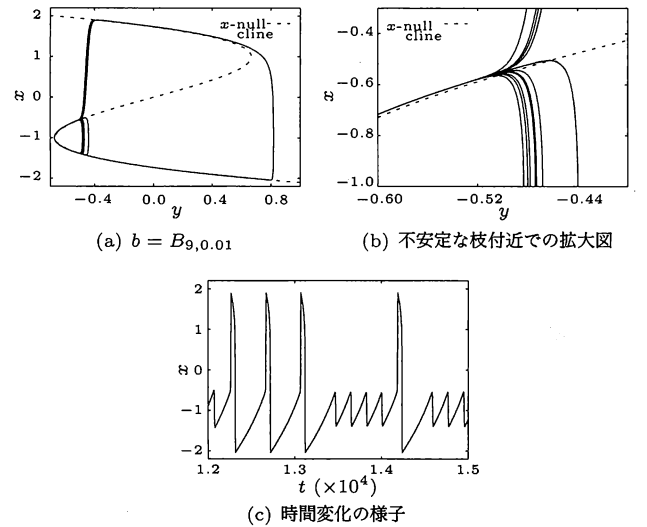


図 2 BVP 方程式においてパラメタ値  $b = B_{9,0.01}$  を用いて計算したアヒル解 ( $\varepsilon = 0.01$ )。

## 2.2 数値計算の誤差が解軌道に及ぼす影響

ここでは、MPFR(the Multiple Precision Floating-point Reliable library) [5] という高精度計算ライブラリを用いて高精度計算することで、数値計算精度が解に及ぼす影響を調べる。このライブラリを用いることで、数値計算に用いる浮動小数点の仮数部の bit 数を任意に設定することができる。以降、計算に用いる変数の仮数部の bit 数を、変数の精度と表現する。

これまでに、図 2 のような不可解な解軌道が、高精度計算ライブラリを用いて変数の有効桁数を大きくした計算では発生しないことを確認した [4]。図 3 は、図 2 と同様のパラメタ値  $\varepsilon = 0.01, b = B_{9,0.01}$  について、Runge-Kutta 法の刻み幅を  $h = 10^{-2}$  とし、計算に用いる変数の精度を 200bit (有効桁数約 60 桁) として計算を行った解軌道である。高精度計算では不可解な解軌道は発生しないことがわかる。このことから、2 次元 BVP 方程式に現れる不可解な解軌道の発生には、数値計算における計算の丸め誤差が大きく影響していると考えられる。

次に、数値解法の精度が解軌道に及ぼす影響を調べる。本研究で用いる 4 次の Runge-Kutta 法の場合、刻み幅  $h$  によって  $\mathcal{O}(h^4)$  の精度が保証されており、 $h$  を変化させることで数値解法の精度が変化する。 $\varepsilon = 0.01$  とし、パラメタ  $b = B_9, B_{14}, B_{19}, B_{26}$  のそれぞれについて Runge-Kutta 法の刻み幅を  $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  として計算を行った。計算に用いる変数の精度は 200bit (有効桁数約 60 桁) とする。

それぞれのパラメタについて計算を行った結果を図 4 に示す。まず図 4(a) では、Runge-Kutta 法の刻み幅を変化させても解軌道は変化していない。それに比べて、図 4(b)–(d) では、Runge-Kutta 法の刻み幅を小さくするにつれてアヒル解が大きくなっていく。これらは、パラメタによって正確な解軌道の計算に必要な数値計算法の精度が異なるということを表していると考えられる。つまり、 $b = B_9$  の場合には  $h = 10^{-2}$  程度の精度でほぼ正確な解が計算でき、 $b = B_{26}$  の場合には  $h = 10^{-2}$  程度の精度では正確な解が計算できないということである。

また、 $h = 10^{-2}$  の刻み幅で解軌道を計算した場合、数値解法の誤差は  $\mathcal{O}(h^{-5}) = \mathcal{O}(10^{-10})$  程度である。一方、double 型変数の有効桁数は約 15 桁程度であり、数値解法の精度よりも高い精度を持っていることがわかる。それにも関わらず、刻み幅  $h = 10^{-2}$  の計算において、不可解な解軌道は発生しない。つまり、計算に用いる変数の精度が不可解な解軌道の発生に対して支配的だと考えられる。

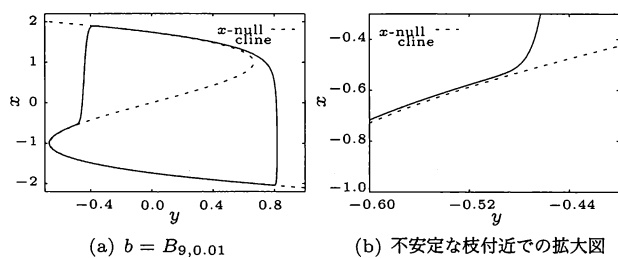


図 3 BVP 方程式において高精度変数を用いて計算したアヒル解 ( $b = B_{9,0.01}, \varepsilon = 0.01$ ).

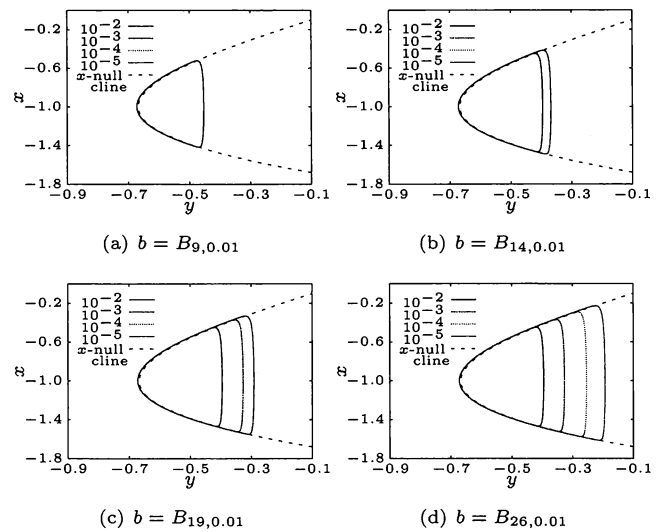


図 4 Runge-Kutta 法の刻み幅  $h$  が解軌道に与える影響 ( $\varepsilon = 0.01$  とし刻み幅を  $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  として計算を行った結果).

## 2.3 不可解な解軌道の発生原因

ここでは、数値計算による精度不足がなぜ不可解な解軌道を発生させるのかを考える。アヒル解は相平面上で  $x$ -nullcline に対して安定な部分と不安定な部分を通過する周期解である。そのような周期解が安定な周期解であるためには、解軌道が通過する不安定な部分での発散のダイナミクスに比べて、安定な部分での収束のダイナミクスが相対的に強い必要がある。つまり、安定な枝付近で解軌道が十分に収束することで、それが不安定な枝での発散のダイナミクスを抑えるのである。しかし、安定な枝において丸め誤差や数値解法による誤差が存在すると、その誤差が不安定な枝付近での発散のダイナミクスによって増幅されるため、不可解な解軌道が発生すると考えられる。つまり、安定な枝付近での計算精度不足が不可解な解軌道の発生原因であると言える。

以上のことから、安定な枝での解の数値計算精度が、解が不安定な枝に沿って (不安定ダイナミクスに逆らって) 進む距離を決めていると考えられる。以下では、数値計算と不安定ダイナミクスの近似計算を用いて、計算の精度と不安定な枝に沿って進む距離との関係性を調べる。

まず、シミュレーションにより、計算に用いる変数の精度と不安定な枝に沿って進む距離との関係性を調べる。BVP 方程式のパラメタを  $\varepsilon = 0.01, b = B_{28}$  とした。パラメタ値  $B_{28}$  は、不安定な枝に十分長く沿って動く解となる (十分大きなアヒル解となる) パラメタである。解軌道の計算には、4 次の Runge-Kutta 法を用い、刻み幅は  $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  とする。この条件下で、計算に用いる変数の精度を 52bit (有効桁数約 15 桁) から 100bit (有効桁数約 30 桁) まで変化させ、アヒル解が不安定な枝に沿う距離を調べた結果を図 5 に示す。ここで、縦軸は不安定な枝に沿って進む  $x$  方向の距離を表しており、不安定な枝を離れる点を  $(x, y) = (x_L, y_L)$  とすると、安定な枝と不安定な枝が交わる点が  $(x, y) = (-1, -2/3)$  であり、この距離は

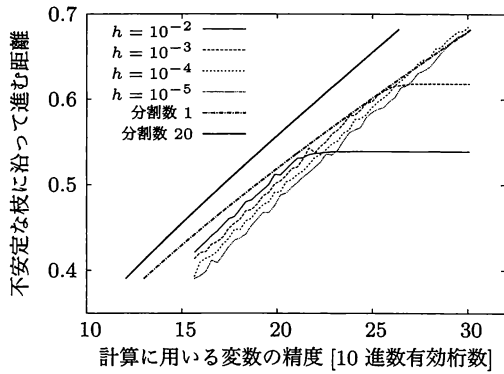


図 5 計算に用いる変数の精度と不安定な枝に沿って進む距離の関係 (シミュレーション結果と理論計算を比較)。

$x_L - (-1)$  で与えられる。図 5 を見ると、変数の精度が高くなるにつれて不安定な枝に沿って進む距離が長くなっていることがわかり、予想した結果と一致する。また、Runge-Kutta 法の刻み幅によって結果に小さな差があるが、変数の精度を高くすることで不安定な枝に沿う距離が長くなるという傾向は同様であることが確認できる。

次に、変数の精度と不安定な枝に沿って進む距離の関係について理論的に議論する [6]。不安定な枝での発散のダイナミクスを近似することで、不安定な枝に沿って進む距離と変数の精度との関係を調べる。図 6 のように、安定な枝と不安定な枝がぶつかる点を  $(x_0, y_0) = (-1, -2/3)$ 、解軌道が不安定な枝から離れる点を  $(x_n, y_n)$  とし、不安定な枝に沿う解軌道を  $n$  分割する。式 (1) において、 $s \equiv \varepsilon t$  と時間スケール変換を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{\varepsilon} \left( x - \frac{x^3}{3} - y \right) \\ \frac{dy}{ds} &= x - b \end{aligned} \quad (3)$$

となる。点  $(\hat{x}, \hat{y})$  におけるヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - \hat{x}^2) & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

である。このヤコビ行列の速いサブシステム方向の固有値を用いると、 $x$  方向の発散のダイナミクスは

$$x(s) = \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} (1 - \hat{x}^2) s \right) \quad (5)$$

と近似できる。次に、解軌道が不安定な枝に沿って動く時間を評価するため、式 (3) の特異極限 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3} - y &= 0 \\ \frac{dy}{ds} &= x - b \end{aligned} \quad (6)$$

を考える。不安定な枝上での  $x$  方向のダイナミクスは

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x - b}{1 - x^2} \quad (7)$$

となる。よって、解軌道が  $x_{i-1}$  から  $x_i$  まで不安定な枝上を動く時間を  $s_i$  とすると、

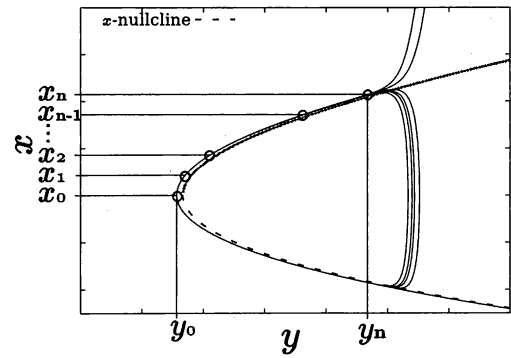


図 6 不安定な枝でのダイナミクスの理論計算 (概念図)。

$$s_i = \int_0^{s_i} ds = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1 - x^2}{x - b} dx \quad (8)$$

となる。したがって、式 (5) より、不安定な枝付近での発散のダイナミクスを以下のように近似する。

$$x(s_n) = \exp \left( \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n (1 - \hat{X}(x_{i-1}, x_i)^2) s_i \right) \quad (9)$$

ここで、

$$\hat{X}(x_i, x_{i-1}) = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (10)$$

であり、 $s_i$  は式 (8) によって決まる (区間  $(x_{i-1}, x_i)$  では、その中点での線形ダイナミクスで近似)。

安定な枝での誤差が式 (9) によって増幅されるのであるが、その増幅された結果が  $\varepsilon$  オーダーの数に留まっている限り、解軌道は不安定な枝に沿って動くことになる。つまり、式 (9) 右辺の逆数の  $\varepsilon$  倍が (解軌道が不安定な枝に沿って  $x_0$  から  $x_n$  まで移動するために) 安定な枝で必要となる精度に対応する。図 5 に、この理論計算結果をシミュレーション結果と共に示した。近似計算において分割数  $n$  が近似の精度に大きく影響すると考えられるため、図 5 には、分割数 1 (分割なし) の場合と分割数 20 の場合を示した。この結果を見ると、理論計算結果とシミュレーション結果とがほぼ同様の傾向を示していることが分かる。しかし、分割数 1 と 20 の近似計算とを比較すると、分割数 20 の場合の直線の傾きはシミュレーション結果の傾きと近い値を取るものの、全体的には分割数 1 の場合の計算の方がシミュレーション結果と近いことが分かる。さらに、Runge-Kutta 法の刻み幅を変化させた場合の結果と比べると、刻み幅を小さくするほど理論計算から離れていくという結果となり、これも予想と反する結果である。これらの原因についてはまだ分かっていないが、大まかには、安定な枝での精度と不安定な枝に沿う距離との関係をシミュレーションと理論計算から定量的に確認できた。

### 3. 3次元システムにおけるアヒル解

これまででは、2次元の BVP 方程式において発生する理論的にあり得ない不可解な解軌道について解析を行ってきた。この2次元の不可解な解軌道と似た解軌道が3次元の特異振動系である拡張 Bonhoeffer-van der Pol (BVP) 方程式においても、



発生することが確認されている [3]. ここでは, その不可解「かもしれない」解軌道を調べ, 3 次元システムにおけるアヒル解について考察する. 一方, 3 次元拡張 BVP 方程式において, Hopf 分岐近傍に一種のアヒル解であるカオス的な振動が発生することが示されている [7]. 3 次元拡張 BVP 方程式において, この長周期振動発生メカニズムにアヒル解の発生メカニズムが関係していると考え, それらの解軌道も同時に調べる.

### 3.1 拡張 Bonhoeffer-van der Pol 方程式

拡張 BVP 方程式は

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{x^3}{3} - y - z + I_{\text{ext}} =: f(x, y, z) \quad (11a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \eta(x - ay) =: g(x, y, z) \quad (11b)$$

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon(x - bz) =: h(x, y, z) \quad (11c)$$

で表される. ここで,  $0 < \varepsilon \ll 1$  である. 拡張 BVP 方程式は 2 次元の fast サブシステム (11a,b) と 1 次元の slow サブシステム (11c) で構成され,  $x, y$  を速い変数,  $z$  を遅い変数と呼ぶ. 速いサブシステムの平衡点の集合を  $S^{3D}$  と表す:

$$\begin{aligned} S^{3D} &:= \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \mid (x, y, z) = \left( x, \frac{x}{a}, -\frac{x^3}{3} + \frac{a-1}{a}x + I_{\text{ext}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3.2 アヒル解の計算

2 次元システムの場合と同様に, 3 次元の場合もアヒル解が発生するパラメタの近似値は漸近解析によって求められる.  $I_{\text{ext}}$  を分岐パラメタとして, アヒル解が発生するパラメタの近似値は漸近展開の形で得られ,  $\varepsilon^n$  の項まで展開して得られたパラメタ  $I_{\text{ext}}$  の近似値を

$$I_{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^n i_k \varepsilon^k \quad (13)$$

と表す. システムのパラメタを  $a = 2.0, b = 1.0, \eta = 1.0, \varepsilon = 0.001$  としたとき, アヒル解が発生するパラメタの近似値を表 3 に示し, パラメタ値  $I_{6,0.001}$  の場合の解軌道を図 7 に示す. 図中の解軌道は 2 次元平面に射影した軌道である. 解の計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用い刻み幅は  $h = 10^{-2}$  とした. 計算に用いる変数の精度は 52bit (有効桁数約 15 桁) である. 図 7 を見ると, 2 次元の場合と同様に  $S^{3D}$  から上方向と下方向に向かう解軌道が発生していることが分かる. 3 次元システムの

表 3 拡張 BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメタの近似値  $I_{\text{ext}}(a = 2.0, b = 1.0, \eta = 1.0, \varepsilon = 0.001)$ .

$n$	$I_{n,0.001}$
1	-0.4708741907 0514174611...
2	-0.4708737966 4042514735...
3	-0.4708737947 4421887671...
4	-0.4708737947 3170935999...
5	-0.4708737947 3160181990...
6	-0.4708737947 3160069432...

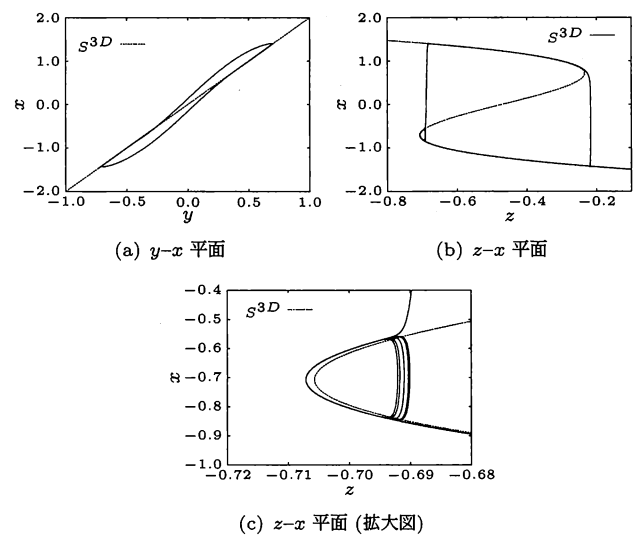


図 7 変数の精度 52bit (有効桁数約 15 桁) による拡張 BVP 方程式におけるアヒル解 ( $a = 2.0, b = 1.0, \eta = 1.0, I_{\text{ext}} = I_6, \varepsilon = 0.001$ )

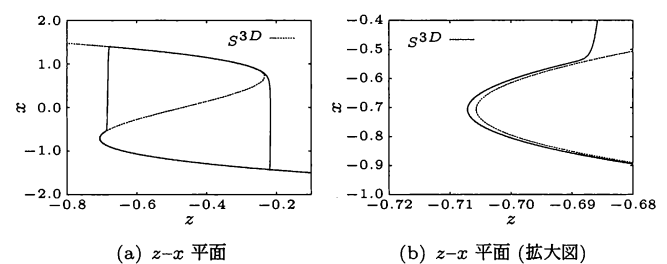


図 8 変数の精度 200bit (有効桁数約 60 桁) の計算による拡張 BVP 方程式におけるアヒル解 ( $a = 2.0, b = 1.0, \eta = 1.0, I_{\text{ext}} = I_6, \varepsilon = 0.001$ )

解軌道を 2 次元平面に射影した場合にはこのような解軌道が現れ得るため, この解軌道は必ずしも不可解な解軌道とは言えない. 次に, 同じパラメタ値を用いて高精度計算を行った結果を図 8 に示す. 図 8 を見ると  $S^{3D}$  から離れる解軌道は上方向にのみ向かい, 図 7 のように 2 方向に分かれていないことが分かる. 高精度計算においてカオス的な挙動が消えるということから, 図 7 の解軌道は 2 次元の場合と同様に不可解な解軌道であると考えられる.

次にこれまでとは異なるパターンの解軌道が生じるパラメタ値を考える. 3 次元拡張 BVP 方程式において, 図 9 のようなアヒル解に似たカオス的な振動が Hopf 分岐近傍に

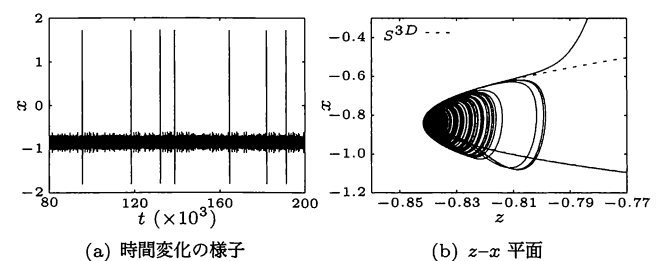


図 9 拡張 BVP 方程式におけるカオス的な振動 ( $a = 3.0, b = 1.0, \eta = 0.13, \varepsilon = 0.01, I_{\text{ext}} = -0.477175$ )

発生することが示されている [7]。そのときのパラメタは  $a = 3.0, b = 1.0, \eta = 0.13, \varepsilon = 0.01, I_{\text{ext}} = -0.477175$  である。そこで、このシステムについて漸近展開を行い、アヒル解が発生するパラメタ値を求めることで、上のような不可解な解軌道が発生するかどうかを調べる。漸近解析によって得られた（アヒル解が発生する）パラメタの近似値を表 4 に、これを用いて計算した解軌道を図 10 に示す。解軌道の計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用い、刻み幅は  $h = 10^{-2}$ 、変数の精度は 200bit（有効桁数約 60 桁）とした。図 10 を見ると、パラメタの次数によって 2 種類の解軌道が発生していることがわかる。これはシステムのホップ分岐近傍で様々な分岐が起きており、アヒル解が発生するパラメタ領域がとても狭いためであると考えられる。また、 $I_{\text{ext}} = I_{4,0.01}$  の場合はアヒル解はきれいな 1 周期解となっており、不可解な解軌道は発生しないことが確認できた。図 9 や図 10 に示した解軌道の定性的な挙動は、

表 4 拡張 BVP 方程式においてアヒル解が発生するパラメタの近似値  $I_{\text{ext}}(a = 3.0, b = 1.0, \eta = 0.13, \varepsilon = 0.01)$ .

$n$	$I_{n,0.01}$
1	-0.4528306612 0079008388...
2	-0.4528241178 8651441383...
3	-0.4528248617 5941906895...
4	-0.4528248165 4118515717...
5	-0.4528248198 2099185888...
6	-0.4528248194 7839757651...

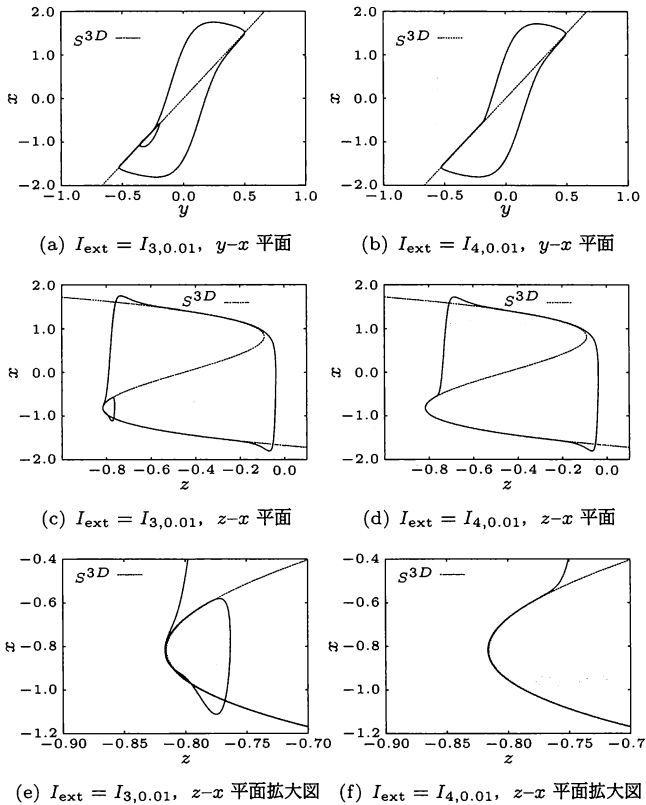


図 10 拡張 BVP 方程式におけるアヒル解 ( $a = 3.0, b = 1.0, \eta = 0.13, \varepsilon = 0.01, I_{\text{ext}} = I_{3,0.01}, I_{4,0.01}$ )

double 型変数を用いた計算においてもほとんど変わらない。つまりこれらのアヒル解のダイナミクスは、同じ 3 次元システムでも図 8 の解軌道とは相当異なることが示唆される。

#### 4. あとがき

本研究では、2 次元の特異摂動系である BVP 方程式に現れる、カオス的な解軌道について数値計算精度に注目して解析を行った。その結果、数値計算における丸め誤差が支配的となって不可解な解軌道が発生していることが確認できた。特に安定な枝付近での丸め誤差が発散のダイナミクスで増幅され、カオス的な解軌道が発生する。また、変数の精度とアヒル解の不安定ダイナミクスの関係についてシミュレーションと理論計算との比較を行い、アヒル解の不安定な枝に沿うメカニズムを定量的に評価することができた。

さらに 3 次元の拡張 BVP 方程式に現れるカオス的な解軌道が高精度計算により発生しなくなるということから、その軌道は 2 次元システムにおける不可解な解軌道と同様のメカニズムによって発生していると考えられる。これは、3 次元システムにおいて解軌道が 2 次元平面に拘束され、2 次元的なダイナミクスにより不可解な解軌道が発生するためだと言える。そして 3 次元拡張 BVP 方程式の別のパラメタ値ではそのような不可解な解軌道は現れず、システムがより 3 次元的な振る舞いをしているのではないかと考える。今後、3 次元システムの解軌道が 2 次元平面に拘束される場合と、そうでない場合についてより詳細な解析を行い、その違いを明らかにしたい。

**謝辞** 本研究の一部は、総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム (FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト) により、日本学術振興会を通して助成を受けた。また、科研費 (24500274) により助成を受けた。

#### 文 献

- [1] J. Moehlis, “Canards for a reduction of the Hodgkin-Huxley equations,” J. Math. Biol., vol. 52, No. 2, pp. 141-153, 2006.
- [2] R. FitzHugh, “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane,” Biophys. J., Vol. 1 pp. 445-466, 1952.
- [3] 大崎 弘貴, “3 次元特異摂動系のホップ分岐近傍に生じるアヒル解の漸近解析と長周期振動に対する考察,” 京都大学大学院工学研究科電気工学専攻 修士論文, 2011.
- [4] 児玉 貴大, 土居 伸二, “特異摂動系におけるアヒル解の数値的考察,” 信学技報, Vol. 112, No. 117, pp.41-46 ,2012.
- [5] The GNU MPFR Library: <http://www.mpfr.org/>.
- [6] J. Guckenheimer, K. Hoffman and W. Weckesser, “Numerical computation of canards,” Int. J. Bifurcat. Chaos., Vol. 10, No. 12 pp. 2669-2687, 2000.
- [7] S. Doi and S. Kumagai, “Generation of very slow neuronal rhythms and chaos near the hopf bifurcation in single neuron models,” J. Comp. Neurosci., Vol. 19, pp. 325-356, 2005.